Développement : Développement en produit eulérien du sinus

Analyse & Probabilités

Référence : Gourdon X., *Les maths en tête, Analyse*, **2ème édition**, ellipses, 2008, p262.
Pour les leçons :
- 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse (à voir aussi).
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Le but de ce développement est de montrer que, pour tout $t \in]-\pi;\pi[$, on a :

$$\sin(t) = t \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Lemme 1. ***Un calcul d'une série de* Fourier.**

Pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\text{cotan}(t) = \frac{1}{t} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Preuve : Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]-\pi;\pi] \quad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t),$$

et telle que f_α est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord que f_α est continue sur $\mathbb{R}$. Calculons sa série de Fourier.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, par parité de $t \longmapsto \cos(\alpha t)\cos(nt)$:

$$\begin{aligned} a_n(f_\alpha) &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha t)\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha t)\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos(\alpha+n)t) + \cos((\alpha-n)t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)t)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)t)}{\alpha-n}\right]_0^{\pi}, \end{aligned}$$

puisque $\alpha + n \neq 0$ et $\alpha - n \neq 0$ (car $\alpha \notin \mathbb{Z}$). Donc :

$$\begin{aligned} a_n(f_\alpha) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n} + \frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha+n} + \frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n}\right) \\ &= \frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{\alpha-n+\alpha+n}{\alpha^2-n^2}\right) \\ &= (-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}. \end{aligned}$$

Comme f_α est impaire, ses autres coefficients de Fourier sont nuls.
Sa série de Fourier est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nt).$$

Maintenant, f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, et comme f_α est continue sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f_α converge simplement vers f_α sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$\forall t \in [-\pi;\pi] \quad \cos(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}\cos(nt).$$

Pour $t = \pi$, et en divisant par $\sin(\alpha\pi) \neq 0$ (car $\alpha \notin \mathbb{Z}$) :

$$\text{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}.$$

Cela est vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ (ce qui est équivalent à $\alpha\pi \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$). Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\text{cotan}(t) = \frac{1}{t} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

$\square$

Théorème 2. *Développement en produit eulérien du sinus.*

Pour tout $t \in]-\pi;\pi[$, on a :

$$\sin(t) = t\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right).$$

<u>Preuve :</u> Soit $x \in]0;\pi[$. Soit $f : [0;x] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0;x] \quad f(t) = \begin{cases} \text{cotan}(t) - \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

D'après le lemme :

$$\forall t \in [0;x] \quad f(t) = 2t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ converge normalement sur $[0;x]$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;x]$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\right| &= \frac{2t}{n^2\pi^2 - t^2} \\ &\leqslant \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2},\end{aligned}$$

avec, puisque $x \neq 0$:

$$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{\pi^2} \times \frac{1}{n^2}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$). Donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0;x]$.
Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\mathrm{d}t \qquad \text{(somme finie)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{-2t}{-t^2 + n^2\pi^2}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

avec $n^2\pi^2 - t^2 > 0$, pour tout $t \in [0;x]$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{+\infty}[\ln(n^2\pi^2 - t^2)]_0^x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Maintenant, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right).$$

Donc :

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{N} \ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)} = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Comme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge, on en déduit que le produit à droite de l'égalité a une limite quand $N \to +\infty$, qu'on va noter $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. En outre, $e^{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)} = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Enfin, en notant $g : t \longmapsto \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$, dérivable sur $]0;x]$ (car sin est positive sur $]0;x] \subset [0;\pi]$), on a, pour $t \in]0;x]$:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\frac{\cos(t)t + \sin(t)}{t^2}}{\frac{\sin(t)}{t}} \\
&= \frac{\cos(t)t + \sin(t)}{t^2} \times \frac{t}{\sin(t)} \\
&= \frac{\cos(t)t + \sin(t)}{t\sin(t)} \\
&= \frac{\cos(t)}{\sin(t)} + \frac{1}{t} \\
&= \text{cotan}(t) + \frac{1}{t} \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

g est donc une primitive de f sur $]0;x]$, et $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \ln(1) = 0$ (car $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, taux d'accroissement du sinus en 0).
Par conséquent :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

En définitive,

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Par composition avec exp et d'après le travail précédent :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

et donc :

$$\sin(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

pour tout $x \in]0;\pi[$. Par imparité des membres de l'égalité, elle est également valable pour $x \in]-\pi;0[$. Et pour $x = 0$, les deux membres valent 0.
D'où le résultat. □